ÉCOLE NAVALE

Concours 1993

Première composition de mathématiques

Durée : 4 heures

Le correcteur demande aux candidats de rédiger avec le plus grand soin leurs démonstrations et d'encadrer les résultats obtenus.

Un raisonnement vague ou incomplet ne pourra en aucun cas être pris en considération.

Les candidats pourront utiliser (dans la suite du problème) les résultats des questions qu'ils n'auront pas pu traiter correctement à la condition expresse de le mentionner explicitement.

Les parties I et II sont indépendantes.

I

1° Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, et $f \in \mathscr{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$. Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p pour f entre a et b.

2° Soit $g \in \mathscr{C}^\infty([1, +\infty[, \mathbb{R})$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\int_n^{n+1} g(\theta)d\theta$ en fonction de $g(n)$ et de $\int_n^{n+1} (n + 1 - \theta)\, g'(\theta)d\theta$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\int_1^{n+1} g(\theta)d\theta$ en fonction des $g(k)$, $g'(k)$

et $\int_k^{k+1} (k + 1 - \theta)^2\, g''(\theta)d\theta$ où $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

c. Dans le cas où l'intégrale $\int_1^{+\infty} g'(u)du$ est absolument convergente, montrer que les séries $\sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} g(u)du$ et $\sum_{n\geq 1} g(n)$ sont de même nature.

3° Soit $\gamma \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe deux réels u et v — que l'on déterminera — tels que la suite :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^\gamma - un^{1+\gamma} - vn^\gamma \right)_{n\geq 1} \text{ soit convergente.}$$

4° Montrer qu'il existe quatre reels λ, μ, ξ, η — que l'on déterminera — tels que la suite :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k - \lambda(n+1)\ln^2(n+1) - \mu(n+1)\ln(n+1) - \xi(n+1) - \eta \ln^2(n+1) \right)_{n\geq 1} \text{ soit convergente.}$$

5° *a.* Déterminer l'ensemble des $\alpha > 0$ tels que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{u}}{u^\alpha} du$ est absolument convergente.

b. Déterminer l'ensemble des $\alpha > 0$ tels que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{u}}{u^\alpha} du$ converge.

6° Déterminer l'ensemble des $\alpha > \frac{1}{2}$ tels que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin \sqrt{n}}{n^{\alpha}}$ converge.

7° Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée de réels et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une valeur d'adhérence de la suite (α_n) s'il existe une suite extraite de (α_n) convergeant vers λ.

Prouver que λ est valeur d'adhérence de la suite (α_n) si et seulement si
$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \forall N \in \mathbb{N},\ \ \exists n \geqslant N \ /\ |\alpha_n - \lambda| < \varepsilon$.

8° Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de réels telle que $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.
Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(\cos a_n)_{n \geq 1}$.

9° Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin \ln n}{n}$.

II

1° Montrer que l'on définit une unique suite $(b_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ en posant :

$$\begin{cases} b_0(x) = 1 \\ b_p'(x) = p b_{p-1}(x) \text{ et } \int_0^1 b_p(x)\,dx = 0 \text{ pour } p \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

2° Calculer $b_p(x)$ pour $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

3° Établir que $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|b_p(x)| \leqslant p!\, 2^p$.

4° On fixe $r \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

a. Prouver que $\forall x \in [-1, 1]$, la série $\sum_{p=0}^{+\infty} b_p(x) \frac{r^p}{p!}$ est convergente. On note $u(x)$ sa somme.

b. Établir avec soin que $x \longrightarrow u(x)$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$.

c. Donner (en la justifiant) une expression simple de $u(x)$.

5° Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $B_p(x) = b_p(x - [x])$ où $[x]$ désigne la partie entière de x. Par exemple $B_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.

a. Étudier la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de $x \longrightarrow B_2(x)$.

b. Même question pour $B_p(x)$ avec $p \geqslant 3$.

6° Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe C^∞ sur $[0, N]$.

a. Exprimer $\sum_{k=1}^{N} f(k)$ en fonction de $\int_0^N f(t)\,dt$, $B_1(0)(f(N) - f(0))$ et de $\int_0^N B_1(x) f'(x)\,dx$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{N} f(k)$ en fonction de $\int_0^N f(t)\,dt$, $B_{j+1}(0)\ [f^{(j)}(N) - f^{(j)}(0)]$ avec $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$, et de $\int_0^N f^{(p+1)}(t)\, B_{p+1}(t)\,dt$.

(On raisonnera par récurrence sur p).